

UNA DESIGUALDAD TRIGONOMETRICA A TRAVÉS DE LA INDUCCIÓN MATEMÁTICA

RICARDO CEDEÑO T. Y OLGA LUCIA YUSTES H.
Universidad Surcolombiana

A raíz del Seminario de investigación que realizan los estudiantes del Programa de Matemáticas y Física de la Universidad Surcolombiana encontramos un método utilizado por Cauchy. Aquí lo hemos adaptado para demostrar una desigualdad trigonométrica por Inducción Matemática.

Si α y β son ángulos que satisfacen las condiciones $0 \leq \alpha \leq 180^\circ$ y $0 \leq \beta \leq 180^\circ$, entonces

$$\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta \leq 2 \operatorname{sen} \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right)$$

Tenemos la igualdad en el caso que $\alpha = \beta$. Para demostrar esto podemos inicialmente mostrar que

$$\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta = 2 \operatorname{sen} \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

En efecto:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta &= \operatorname{sen} \left(\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha - \beta}{2} \right) + \operatorname{sen} \left(\frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2} \right) = \operatorname{sen} \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) + \\ &\operatorname{sen} \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) + \operatorname{sen} \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) - \operatorname{sen} \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) = \\ &2 \operatorname{sen} \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right). \text{ Ahora,} \end{aligned}$$

$\alpha - \beta$ satisface $-180^\circ \leq \alpha - \beta \leq 180^\circ$ esto lleva a que $\cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$ es positivo o es cero,

con valor máximo 1, así tenemos que $\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta = 2 \operatorname{sen} \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \leq$

$$2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right).$$

Es natural pensar en la generalización de este resultado. Intuitivamente, tenemos que $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ son ángulos que satisfacen las condiciones $0 \leq \alpha_j \leq 180^\circ$ para todo $j = 1, 2, \dots, n$ entonces

$$\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 + \dots + \sin \alpha_n \leq n \sin n \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}{2} \right), \text{ la igualdad}$$

ocurre Si $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n$

Para demostrar esta corazonada, lo trataremos desarrollando una técnica empleada por Cauchy para tratar demostraciones por Inducción Matemática.

Si llamamos a P_n , la función proposicional $\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 + \dots + \sin \alpha_n \leq n \sin n \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}{2} \right)$, sabemos ya que P_1 y P_2 son verdaderas.

Vamos a suponer que P_n , es válida para cualquier entero $n \geq 3$, y trataremos de establecer la veracidad de P_{n-1} .

Sea a $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1}$, $n-1$ ángulos no todos iguales, y definamos a

$$\alpha_n \text{ como } \alpha_n = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1})}{n-1} \text{ Observemos que } \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1} + \alpha_n = (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1}) + \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1})}{n-1} = (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1}) \left(1 + \frac{1}{n-1} \right) = \left(\frac{n}{n-1} \right) (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1}) = \left(\frac{n}{n-1} \right) (n-1) \alpha_n = n \alpha_n. \text{ Así que } \sin \alpha_1 + \dots + \sin \alpha_{n-1} + \sin \alpha_n \leq n \sin n \left(\frac{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}{n} \right)$$

$$\text{implica que } \sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 + \dots + \sin \alpha_{n-1} + \sin \alpha_n \leq n \sin \alpha_n = (n-1) \sin \left(\frac{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}{n-1} \right)$$

Ahora a partir de suponer que P_n es verdadera veamos que P_{n-1} también lo es.

Consideremos $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{2n}$ donde los α_j son ángulos cualesquiera, no todos iguales, satisfaciendo $0 \leq \alpha_j \leq 180^\circ$ entonces tenemos: $\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 + \dots + \sin \alpha_n \leq n \sin \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}{n} \right)$ y, $\sin \alpha_{n+1} + \sin \alpha_{n+2} + \dots + \sin \alpha_{2n} \leq n \sin \left(\frac{\alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} + \dots + \alpha_{2n}}{n} \right)$, luego $\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 + \dots + \sin \alpha_{2n} \leq n \sin n \left(\frac{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}{n} \right) + n \sin n \left(\frac{\alpha_{n+1} + \dots + \alpha_{2n}}{n} \right) = n [\sin \left(\frac{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}{n} \right) + \sin \left(\frac{\alpha_{n+1} + \dots + \alpha_{2n}}{n} \right)] \leq 2n$

$$\left[\sin \left(\frac{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}{n} \right) + \sin \left(\frac{\alpha_{n+1} + \dots + \alpha_{2n}}{n} \right) \right] 2n \sin \left(\frac{\alpha_1 + \dots + \alpha_{2n}}{2n} \right).$$

Este resultado lo podemos enunciar como:

Teorema. Si $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ Son ángulos que satisfacen las condiciones $0 \leq \alpha_j \leq 180^\circ$ para todo $j = 1, 2, \dots, n$ entonces: $\sin \alpha_1 + \dots + \sin \alpha_n \leq n \sin \left(\frac{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}{n} \right)$ la igualdad sí y sólo sí $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n$.

Es bastante interesante e ingenioso el método desarrollado por Cauchy para demostrar teoremas utilizando la Inducción Matemática.

BIBLIOGRAFIA

1. Apostol, Tom., Calculus. Volumen I, Editorial Reverté, 1.972.
2. Cedeño, R., Penagos M., *La inducción en la educación secundaria*, XII Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística, 1.995.
3. Niven, Ivan, *Maxima and Minima Without Calculus*, The Mathematical Association of America, 1.981.
4. Yustes, O. L., *Seminario de Investigación*, Universidad Surcolombiana, 1996.
DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS, UNIVERSIDAD SURCOLOMBIANA,
NEIVA - HUILA. ❀